Mercados Financieros y Curvas de Rendimiento

Banco Central de Reserva del Perú

Paul Castillo Bardález

San José, Costa Rica, 24 – 26

Setiembre 2008

Contenido

- Aspectos conceptuales
- Curvas de Rendimientos
- Estimación de curvas de rendimiento
- Extracción de información a partir de la curva de rendimientos

- Es un instrumento de deuda, por el cual el emisor se compromete a pagar cupones periodicos y el principal al vencimiento.
- Existen dos casos clásicos:
  - Bonos de cupón cero, o bonos a descuento: pagan un único monto a una fecha futura determinada conocida como fecha de maduración. El valor de este pago es conocido como el valor facial del bono.
  - Bonos cupones, pagan cupones en fechas periodicas antes de la maduración del bono.

- El rendimiento a maduración es una tasa de descuento que iguala el valor presente de los pagos del bono a su precio.

$$P_{n,t} = \frac{1}{(1+Y_{n,t})^{n}}$$

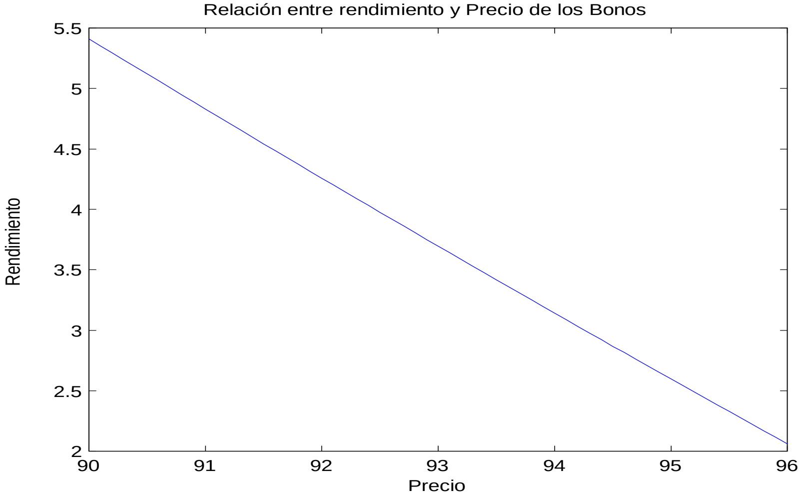
- Por lo tanto el rendimiento del bono se puede determinar a partir del precio,

$$(1+Y_{n,t}) = P_{n,t}^{-\frac{1}{n}}$$

- Utilizando logartimos obtenemos el logartimo del rendmiento,

$$y_{n,t} = -\frac{1}{n} p_{n,t}$$

- Existe una relación negativa entre el precio del bono y su rendimiento



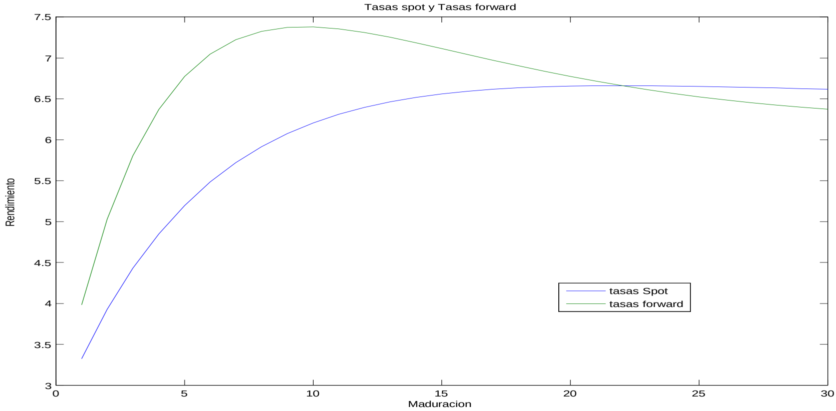
- Es la tasa implicita vigente entre el periodo $n+1$ y n. Esta tasa no es observable en el periodo t
- Tasas forward, se define de la siguiente manera,

$$\left(1+F_{n,t+1}\right)=\frac{P_{n,t}}{P_{n+1,t}}=\frac{\left(1+Y_{n+1,t}\right)^{n+1}}{\left(1+Y_{n,t}\right)^{n}}$$

- Tomando logartimos se obtiene,

$$f_{n,t}=p_{n,t}-p_{n+1,t}=ny_{n,t}+\left(n+1\right)y_{n+1,t}$$

- La tasa spot es un promedio geométrico de las tasas forward

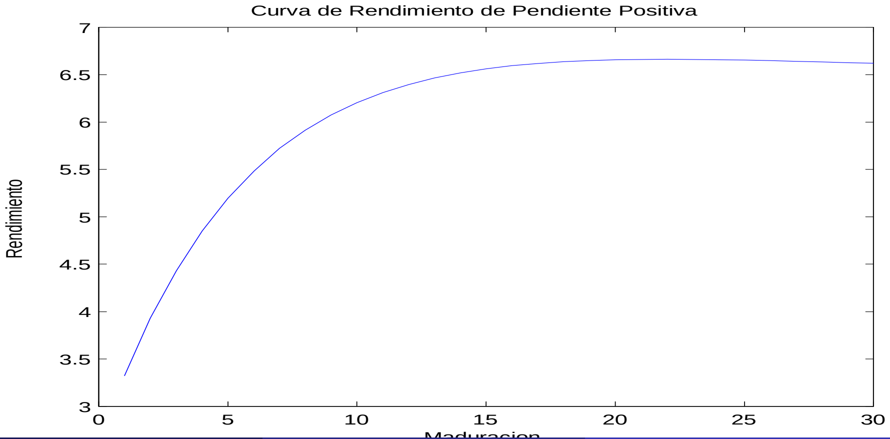


- El precio de un bono cupón de maduración n, $P_{n,t}$ se determina como el valor presente neto descontado de sus flujos de cupones y del valor facial a la fecha de redención.

$$P_{n,t} = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{C}{(1+y_{n,t})^t} + \frac{F}{(1+y_{n,t})^n}$$

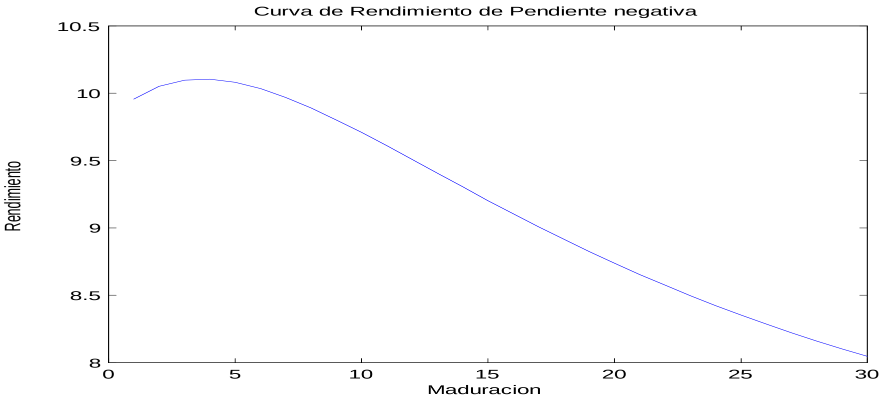
- Donde, C representa el valor de los cupones, $y_{n,t}$ el rendimiento efectivo anual, y F es el valor facial o nominal del bono.

- La curva de rendimiento o yield curve, es la relación de los rendimientos y la maduración de bonos que representan el mismo riesgo crediticio, para una moneda y deudor determinando.



Curvas de rendimiento

- La curva de rendimientos puede tener pendiente positiva, negativa o ser constante.



- Una buena teoría de la estructura de las tasas de interés debería explicar los siguientes hechos estilizados:
  - Tasas de interés de diferente maduración usualmente se mueven juntas, la curva de rendimientos se desplaza
  - Cuando las tasas de interés son bajas, es mas probable que la curva de rendimientos tenga pendiente positiva, cuando la tasa es alta, es mas probable que la curva de rendimiento es de pendiente negativa.
  - En la mayoría de los casos la curva de rendimientos tiene pendiente positiva

- La tasa de interés de largo plazo es el promedio de las tasas de interés de corto plazo.
- Esta teoría asume:
  - Bonos de diferente maduración son sustitutos perfectos.
  - No existen costos de arbitrar entre bonos de diferente maduración
- La teoría implica que el redimiento esperado de los bonos tiene que ser el mismo, independiente de su periodo de maduración

$$i_{n,t} = \frac{i_{1,t} + i^e_{1,t+1} + i^e_{1,t+2} + i^e_{1,t+3} \cdots i^e_{1,t+n}}{n}$$

- Esta teoría explica los hechos estilizados 1 y 2.
  - Cambios en el valor esperado de las tasa de corto plazo, afectan simultáneamente las tasas de interés a varios horizontes, es decir las tasas se mueven juntas.
  - La tasa de corto plazo muestra reversión a la media, cuando es alta, se espera que baje, cuando es baja se espera que suba.
- Esta teoría no puede explicar el hecho estilizado 3, curva de rendimiento en la mayoría de los casos tiene pendiente positiva.

- Supuestos
  - Los mercados de bonos de diferente maduración están completamente separados, no son sustitutos.
  - Las tasas de interés reflejan las condiciones de mercado en cada horizonte de maduración
  - En esta teoría una curva de rendimiento de pendiente positiva refleja que existe un exceso de demanda por bonos de corto plazo respecto a bonos de largo plazo.
  - Puede explicar hecho estilizado 3, pero no 1 y 2

- Supuestos
  - Bonos son sustitutos imperfectos, por lo tanto existirá una premio por riesgo de liquidez.
  - La tasa de interés de bonos de largo plazo es igual al promedio de las tasas de interes esperadas de corto plazo más un premio por liquidez.

$$i_{n,t} = \frac{i_{1,t} + i^e_{1,t+1} + i^e_{1,t+2} + i^e_{1,t+3} \cdots i^e_{1,t+n}}{n} + \rho_t$$

  donde ρ_t mide un premio por liquidez

- Esta teoría permite explicar los tres hechos estilizados sobre la curva de rendimieno

Determinantes de las curvas de rendimiento

- Las curvas de rendimientos usualmente se desplazan reflejando noticias sobre el entorno macroeconómico doméstico y externo,
  - Noticias relacionadas al accionar de la política monetaria, por ejemplo, expectativas de inflación, o presiones en el mercado de trabajo.
  - Noticias sobre cambios en la oferta de bonos de corto y largo plazo, exceso de oferta de bonos de largo plazo incrementa las tasas de interés de largo plazo.
  - Cambios en la preferencia por riesgo y liquidez de los agentes.

Determinantes de las curvas de rendimiento

- Cambios permanentes en las tasas de interés de corto plazo tienen un mayor impacto en las tasas de largo plazo. Consideremos la tasa de interés $i_{3,t} = \frac{1}{3}\left(i_{1,t} + i^e_{1,t+1} + i^e_{1,t+2}\right)$
- Un cambio permanente, genera

$$\begin{aligned} i^e_{1,t+1} &= i_{1,t} + \delta \\ i^e_{1,t+2} &= i_{1,t} + \delta \\ \Delta i_{3,t} &= \tfrac{2}{3}\delta \end{aligned}$$

- Un cambio transitorio

$$\begin{aligned} i^e_{1,t+1} &= i_{1,t} + \delta \\ i^e_{1,t+2} &= i_{1,t} \\ \Delta i_{3,t} &= \tfrac{1}{3}\delta \end{aligned}$$

Estimación de la curva de Rendimiento

- Usualmente no todos los bonos tienen el mismo nivel de liquidez, dependiendo de las preferencias de los participantes de mercado, la liquidez puede, por ejemplo concentrarse en bonos de corto y largo plazo, pero no en los plazos medianos
- Para algunos plazos puede no existir el bono correspondiente, por ejemplo, 9 años.
- En estos casos se requiere completar la curva de rendimientos a partir de los precios y rendimientos de los bonos más líquidos, para ello se debe estimar una curva de rendimiento contínua.

- Estos autores proponen una función no lineal de cuatro parámetros para la tasa forward,

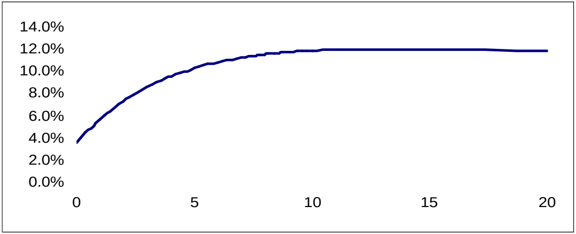
$$f\,(m,b) = \beta_0 + \beta_1 \exp(-\frac{m}{\tau_1}) + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} \exp(-\frac{m}{\tau_1})$$

  donde, $b = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1)$ y m representa la fecha de vencimiento.
- Dada la siguiente relación entre la tasa spot y tasa forward instantanea,

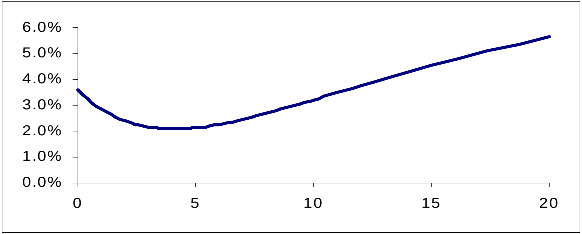
$$i_{t,t+m} = \frac{1}{m} \int_{s=0}^{m} f_{t,t+s}$$

- La tasa de interés spot con plazo de vencimiento igual a m en el periodo t, esta determinada.

$$i_{m,t} = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1-\exp(-\frac{m}{\tau_1})}{\frac{m}{\tau_1}} \right) + \beta_2 \left(\frac{1-\exp(-\frac{m}{\tau_1})}{\frac{m}{\tau_1}} - \exp(-\frac{m}{\tau_1}) \right)$$



β_0	10.2%
β_1	-6.6%
β_2	14.9%
τ_1	4.460



β_0	10.2%
β_1	-6.6%
β_2	-14.9%
τ_1	4.460

- La forma de la curva forward y spot del modelo de Nelson y Siegel esta determinado por el valor de sus parámetros.
- El parámetro β_0 determina la tasa a la converge la curva a largo plazo
- El otro parámetro, β_1 mide que tan lejos se encuentra al punto inicial de la tasa de largo plazo.
- El signo de β_2 indica si la curva presenta una joroba (si es positivo) o una forma de U (cuando es negativo)
- El parámetro $\tau_1$indica la posición de la joroba y la velocidad a la que las tasas de corto plazo convergen a las tasas de mediano plazo.

- Este autor propone una versión ampliada al modelo de Nelson y Siegel (1987)

$$f(m,b) = \beta_0 + \beta_1 \exp(-\frac{m}{\tau_1}) + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} \exp(-\frac{m}{\tau_1}) + \beta_3 \frac{m}{\tau_2} \exp(-\frac{m}{\tau_2})$$

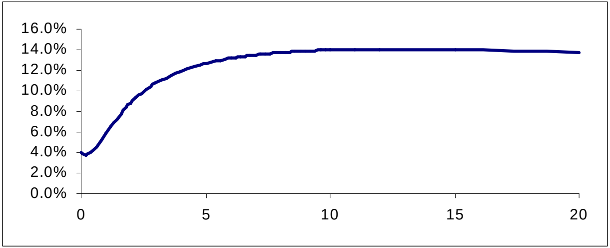
donde, $b = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1, \beta_3, \tau_2)$ y m representa la fecha de vencimiento.

- La tasa de interés spot con plazo de vencimiento igual a m en el periodo t, esta determinada.

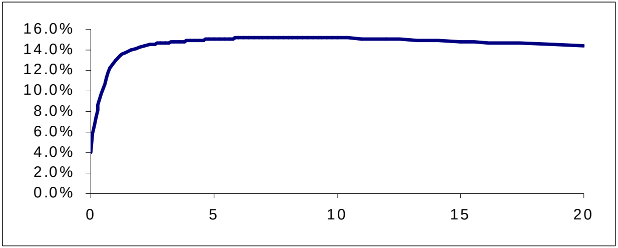
$$i_{m,t} = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - \exp(-\frac{m}{\tau_1})}{\frac{m}{\tau_1}} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - \exp(-\frac{m}{\tau_1})}{\frac{m}{\tau_1}} - \exp(-\frac{m}{\tau_1}) \right) +$$

Estimación de la curva de Rendimiento

Modelo de Svensson



β_0	12.0%
β_1	-8.0%
β_2	-12.0%
$\beta 3$	10.0%
τ_1	0.500
τ_2	5.000



β_0	12.0%
β_1	-8.0%
β_2	12.0%
$\beta 3$	10.0%
τ_1	0.500
τ_2	5.000

- En este modelo, el parámetro, β_3 indica una segunda joroba
- El otro parámetro, τ_2 indica la posición de la segunda joroba,
- Ambos modelos, los de Nelson y Siegel y Svensson incorporan la posibilidad de curvas de rendimientos invertidas.

- En este modelo, el parámetro, β_3 indica una segunda joroba
- El otro parámetro, τ_2 indica la posición de la segunda joroba,
- Ambos modelos, los de Nelson y Siegel y Svensson incorporan la posibilidad de curvas de rendimientos invertidas.

- Para poder estimar la curva de rendimiento utilizando el modelo de Nelson y Siegel o el modelo de Svensson, se necesita primero transforma los rendimientos de los bonos en precios.
- En mercados desarrollado, las cotizaciones de precios que se publican son limpias de los interes corridos, en mercados emergentes este no es usualmente el caso.
- El precio sucio de un bono esta determinado por,

$$P = \frac{1}{(1+y)^{\frac{u}{v}}} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{C}{(1+y)^{t}} + \frac{F}{(1+y)^{n}}$$

- Los interes corridos se calculan como, $IC = \frac{C(v-u)}{v}$
- Donde, v representa el número de días corridos desde el pago del último cupón hasta la fecha de pago del próximo cupón.
- u representa el número de días corridos entre la fecha del cierre de la transacción hasta el día de pago del próximo pago.
- C, es el pago de cupón por periodo, si es semestral , $C = c\frac{F}{2}$

- Para estimar los parámetros de los modelos de Nelson y Siegel y Svensson, es necesario primero definir adecuadamente la función objetivo.
- Se consideran, los siguientes casos
  - $Min \sum (P_i - P_i(b))^2$
  - $Min \sum ((P_i - P_i(b))\, W_i)^2$, en este caso, $W_{1,i} = \frac{1}{D_i}$, $W_{2,i} = \frac{1}{D_i^*}$, y $W_{3,i} = \frac{1}{P_i D_i^*}$
- Donde, D_i= duración de McCauley, D_i^* duración modificada, y P_i es el precio del bono,

- El modelo de Nelson y Siegel, y el de Svensson estan sujetas a las siguientes restriccioens,
    - $\beta_0 + \beta_1 = r_{t=0}$ ($r_{t=0}$ es la tasa overnight)
    - $r_{t=0} \succ 0$ (tasa overnight positiva)
    - $r_{t=\infty} = \beta_0 \succ 0$ (tasa de largo plazo es positivo)
    - $f_1 \geq 0$ (tasa forward no negativa)

- Los valores iniciales de los parámetros del modelo son
  - $\beta_0 =$ yield del bono de mayor plazo.
  - $\beta_1 = r_0 - \beta_0$ (tasa overnight positiva)
  - $\beta_2 =$ (Positivo o negativo de acuerdo a la forma de la curva)
  - $\tau_1 = 2$ (tasa forward no negativa)
- La estimación de Svensson toma en cuenta como valores inciales los resultados de Nelson y Siegel y asume además, $\beta_3 = 0$, y $\tau_1 = 2$

- Los valores iniciales de los parámetros del modelo son
  - $\beta_0 =$ yield del bono de mayor plazo.
  - $\beta_1 = r_0 - \beta_0$ (tasa overnight positiva)
  - $\beta_2 =$ (Positivo o negativo de acuerdo a la forma de la curva)
  - $\tau_2 = 2$ (tasa forward no negativa)

Extrayendo información a partir de las curvas de rendimiento

- Las curvas de rendimiento permiten extraer información sobre las tasas de interés forwards, a partir de la siguiente identidad,

$$i^e_{1,t+n} = n i_{n,t} - (n-1)\, i_{n-1,t}$$

- Asimismo, si en el mercado existen bonos indiziados, podemos extraer las tasas de interés reales esperadas,

$$r^e_{1,t+n} = n r_{n,t} - (n-1)\, r_{n-1,t}$$

- Utilizando la ecuación de Fisher obtenemos, $\pi^e_{t+n} = i^e_{1,t+n} - r^e_{1,t+n}$

- Aplicamos la siguiente fórmula, $ni_{n,t} - (n-1)\, i_{n-1,t} = i^{e}_{1,t+n}$

Curva de Rendimiento nominal

Plazo	1	2	3	4	5
tasa nominal	5.5	6	6.3	7	7.5
Tasa forward		6.5	6.9	9.1	9.5

- Aplicamos la siguiente fórmula, $\pi^e_{t+n} = i^e_{1,t+n} - r^e_{1,t+n}$

Curva de Rendimiento Real

Plazo	1	2	3	4	5
Tasa real	3.5	3.2	3.5	4	4.2
Tasa forward		2.9	4.1	5.5	5

Expectativas de Inflación

Plazo	1	2	3	4	5
Inflación esperada		3.6	2.8	3.6	4.5

Estimación de la curva de Rendimiento

- Existen varios modelos para estimar la curva de rendimientos a partir de una muestra de precios
- Estos pueden ser parámetricos o no parametricos.
- Los modelos parámetricos construyen la curva de rendimiento a partir de la estimación de un conjunto de parámetros que replican una forma funcional de la curva de rendimientos, por ejemplo Nelson y Siegel(1987), y Svensson (1994).
- Los modelos no parámetricos ajustan unen segmentos de curvas para capturar la forma de la curva de rendmientos. Entre los más populares están los metodos de spline.